

**ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО  
МАТЕМАТИКЕ**

**МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП**

**9 класс**

**Решения задач.**

9.1. Рассмотрим разность:  $b - a = (x^2 + 13x + 3) - (x^2 - 3x - 2) = 16x + 5$ . Она является нечетным числом (так как  $16x$  всегда четно), поэтому числа  $a$  и  $b$  имеют разную четность, то есть одно из них обязательно четное. Но если простое число является четным, оно может быть равно только 2.

Уравнение  $x^2 + 13x + 3 = 2$  натуральных корней не имеет, а уравнение  $x^2 - 3x - 2 = 2$  имеет единственный натуральный корень  $x = 4$ .

Подставляя  $x = 4$  в трехчлен  $x^2 + 13x + 3$ , получаем число 71, являющееся простым.

Ответ:  $x = 4$ .

9.2. Если  $v$  м/с — скорость самого медленного бегуна, то скорости остальных будут равны  $(v + 0,1)$  м/с,  $(v + 0,2)$  м/с,  $(v + 0,3)$  м/с.

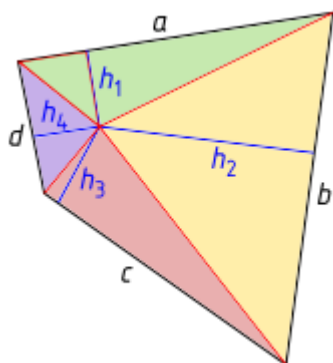
Первая команда пробежит эстафету за  $\frac{400}{v} + \frac{400}{v + 0,3} = \frac{400(2v + 0,3)}{v(v + 0,3)}$  секунд,

а вторая — за  $\frac{400}{v + 0,1} + \frac{400}{v + 0,2} = \frac{400(2v + 0,3)}{(v + 0,1)(v + 0,2)}$  секунд.

Числители дробей равны, поэтому меньше та из них, у которой знаменатель больше. Но  $(v + 0,1)(v + 0,2) = v^2 + 0,3v + 0,02$  больше, чем  $v(v + 0,3) = v^2 + 0,3v$ . Следовательно, вторая команда быстрее пробежит эстафету.

Ответ: вторая команда.

9.3.



Докажем, что если  $h_1, h_2, h_3, h_4$  — расстояния от произвольной точки, лежащей внутри выпуклого четырехугольника, до его сторон с длинами соответственно  $a, b, c, d$ , то  $ah_1 + bh_2 + ch_3 + dh_4 = 2S$ , где  $S$  — площадь данного четырехугольника. Это следует из того, что площадь четырехугольника равна сумме площадей треугольников, показанных на рисунке разными цветами, то есть  $1/2 ah_1 + 1/2 bh_2 + 1/2 ch_3 + 1/2 dh_4 = S$ .

Пусть теперь  $a, b, c, d$  — длины сторон данного четырехугольника, а  $S$  — его площадь, тогда по условию

$$6a + 16b + 14c + 2d = 2S,$$

$$8a + 13b + 12c + 6d = 2S.$$

Домножим второе уравнение на 2 и вычтем из результата первое уравнение, получим  $10a + 10b + 10c + 10d = 2S$ , откуда  $r = 2S / (a + b + c + d) = 10$ .

Ответ: 10.

9.4.



Предположим, что мы смогли замостить доску  $10 \times 10$  требуемым образом. Рассмотрим шахматную раскраску доски. На доске будет 50 белых и 50 черных клеток. Заметим, что каждая фигурка будет накрывать либо 3, либо 1 черную клетку (раскраска фигурок на рис.). Поскольку клеток 100, а каждая фигурка состоит из 4 клеток, то всего потребуется 25 фигурок. Но так как их будет нечетное количество, и каждая фигурка накрывает нечетное количество черных клеток (три или одну), то все фигурки накроют нечетное количество черных клеток. Однако они должны накрыть 50 черных клеток, 50 - четное число. Получили противоречие. Следовательно, доску  $10 \times 10$  нельзя замостить фигурками данного вида.

9.5. Поскольку  $y(0) = c$ , то  $C(0, c)$  и  $A(-c, 0)$ . Поэтому один из корней уравнения  $x^2 - 20x + c = 0$  равен  $-c$ , т.е.  $c^2 + 20c + c = 0$ , откуда  $c = -21$  (т.к.  $c \neq 0$  по условию). Тогда корни уравнения:  $x_1 = 21, x_2 = -1$ . Длина основания треугольника равна  $x_1 - x_2 = 22$ , а высота 21. Итак, площадь треугольника 231.

Ответ: 231.