ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
10 класс

Решения задач.

10.1. Обозначим 2^{2023} = n. Получим $\frac{n+1}{2n+1}$ - $\frac{2n+1}{4n+1} = \frac{(n+1)(4n+1)-(2n+1)^2}{(2n+1)(4n+1)} = \frac{4n^2+5n+1-4n^2-4n-1}{(2n+1)(4n+1)} = \frac{n}{(2n+1)(4n+1)} > 0$ для любого n.

Ответ: $\frac{2^{2023}+1}{2^{2024}+1} > \frac{2^{2024}+1}{2^{2025}+1}$.

10.2. Обозначим первоначальное число станков через x, а число оставшихся станков через n. Условие задачи приводит к уравнению: $x \cdot \frac{100-n}{100} = n$. Преобразуем это уравнение к виду: $x = \frac{10000}{100-n} - 100$.

Для того, чтобы найти наименьшее значение x, число $100 - n$ надо брать наибольшим. Методом полного перебора найдем все делители числа 10000, меньшие 100. Получим $100 - n = 80$. Откуда $x = 25$.

Ответ: 25 станков.

10.3. $2x^2 + y^2 = 2xy + 4x$;
$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2xy + x^2 = 4$;
$(x-2)^2 + (x-y)^2 = 4$.
Если сумма двух квадратов целых чисел равна 4, то один из квадратов равен 4, а другой – 0.

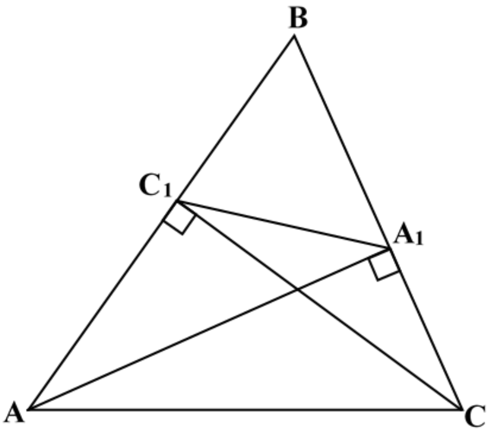
Пусть $(x-2)^2 = 0$, тогда $x = 2$ и $(2-y)^2 = 4$. Откуда получаем, что $2 - y = 2$ или

$2 - y = -2$, то есть, $y = 0$ или $y = 4$. Таким образом, получаем два первых решения: (2;0), (2;4).

Пусть $(x-2)^2 = 4$, тогда $x = 4$ или $x = 0$. Откуда получаем, что $x - y = 0$, что дает ответы: (0;0) (4;4)
Таким образом: (2;0), (2;4), (0;0), (4;4).

Ответ: (2;0), (2;4), (0;0), (4;4).

10.4. Пусть A_1 и C_1 – основания высот треугольника ABC, опущенных из вершин A и C соответственно, $\angle B = \beta$, а R – радиус описанной окружности.



Независимо от вида треугольника ABC треугольник A_1BC_1 ему подобен. Заметим, что треугольники AA_1B и CC_1B прямоугольные с углом при вершине B, равным β, если β<90˚, и равным 180˚ - β, если β> 90˚.

Во всех случаях $\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{A_1B}{AB} = \frac{C_1B}{BC} = |cos\beta|$.

Так как по условию $A_1C_1 = \frac{R}{2}$, а по теореме синусов AC = 2Rsin β, получаем уравнение

$2\sin\beta\cdot|\cos\beta| = \frac{1}{2}$. (*)

Если β<90˚, то из (*) sin 2β = $\frac{1}{2}$, откуда 2β = 30˚ или 2 β = 150˚. То есть β = 15˚ или β = 75˚.

Если β> 90˚, то получаем уравнение sin 2β =- $\frac{1}{2}$, откуда 2β = 210˚ или 2β = 330˚.

Ответ: 15˚, 75˚, 105˚, 165˚

10.5. Составим таблицу 7 х 7, в каждой клетке которой напишем число, равное количеству допустимых путей, которыми король может дойти до этой клетки из левого нижнего угла. Заполнять таблицу будем постепенно. Сначала левый столбец и нижнюю строку единицами. Кроме того, в центральной клетке ставим ноль (по условию задачи). Далее заполняем второй слева столбец и вторую снизу строку и т.д. по следующему правилу: в очередной клетке ставим сумму чисел, стоящих в трех соседних клетка – снизу, слева и по диагонали (снизу слева). В результате получим таблицу. Ответом служит число, стоящее в правом верхнем углу.

1	13	85	314	848	2078	5020
1	11	61	168	366	864	2078
1	9	41	66	132	366	848
1	7	25	0	66	168	314
1	5	13	25	41	61	85
1	3	5	7	9	11	13
1	1	1	1	1	1	1

Ответ: 5020